

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: Giulio Fiorillo e Alessandro Mazzoccoli

TUTORATO 1

2 OTTOBRE 2014

1. Calcolare Sup e Inf dei seguenti insiemi e determinare l'esistenza di massimi e minimi:

- $A := \left\{ \frac{2k}{k^2 + 1} : k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- $B := \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
- $C := \{x^2 \leq 2 : x \in \mathbb{R}\} \cap \{\mathbb{Q}\}$;
- $D := \{x \mid |x| \geq 2 : x \in \mathbb{R}\}$;

2. Dimostrare le seguenti affermazioni per induzione:

- $\sum_{k=1}^N (2k-1) = N^2, \forall N \in \mathbb{N}$
- $(1-p)(1+p+p^2+\dots+p^N) = 1-p^{N+1}, \forall N \in \mathbb{N}$ con $N \geq 1$
e utilizzare questo risultato per dimostrare che:
$$\sum_{k=0}^N p^k = \frac{1-p^{N+1}}{1-p}$$
- Dimostrare per induzione che se un insieme \mathcal{A} ha $N \in \mathbb{N}$ elementi
 $\Rightarrow \#\mathcal{P}(\mathcal{A}) = 2^N$
- $n^3 + 5n$ è sempre divisibile per 6 $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $10^n - 1$ è sempre divisibile per 9 $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\sum_{k=0}^N k = \frac{N(N+1)}{2}, \forall N \in \mathbb{N}$